

Metody analizy sezonowości stochastycznej w produkcji budowlano-montażowej

Sezonowość występująca w danych ekonomicznych jest definiowana jako powtarzalne, występujące w ciągu roku odchylenia wartości szeregu czasowego od trendu wywołane przez czynniki pogodowe, kalendarzowe oraz działalność uczestników rynku. Ze względu na specyfikę danych ekonomicznych dokładna regularność zmian sezonowych z zasady nie występuje¹. Taka definicja wskazuje, że ze względu na źródło powstawania, natura fluktuacji sezonowych może być zróżnicowana. Przykładowo, oddziaływanie czynników kalendarzowych i pogodowych powoduje występowanie sezonowości deterministycznej, natomiast zmiany natężenia aktywności ekonomicznej podmiotów gospodarczych skutkują powstawaniem komponentu sezonowego o charakterze losowym.

Estymacja procesów sezonowych jest obecnie przedmiotem szczególnego zainteresowania ekonomistów. Występowanie w szeregach czasowych czynników sezonowych może m.in. powodować nieprawidłową konstrukcję modeli wielowymiarowych, błędną identyfikację kointegracji zmiennych oraz niską jakość prognoz.

Należy podkreślić, że z uwagi na ewolucję preferencji i zachowań uczestników rynku oraz oddziaływanie na gospodarkę wydarzeń szokowych, efekt sezonowy nie jest stały. Z tego powodu jego mechaniczna estymacja nie jest możliwa. Przeciwnie, wymaga ona wnikliwego i indywidualnego podejścia do każdego analizowanego szeregu czasowego. Istotne znaczenie ma ocena zależności pomiędzy składowymi szeregu czasowego. Gdy są one od siebie niezależne, czynnik sezonowy może być wyeliminowany z szeregu przez zastosowanie metod wyrównania sezonowego, takich jak X-12-ARIMA² lub TRAMO/SEATS³. W przeciwnym przypadku literatura przedmiotu zaleca jego modelowanie za pomocą dodatkowych regresorów⁴.

Szczególne trudności sprawia szacowanie sezonowości o charakterze losowym, która jest równoznaczna z obecnością w szeregu sezonowych pierwiastków jednostkowych. Niestety większość dostępnych testów, takich jak test Dickey-Hasza-Fuller (DHF) oraz test Bhargava, ma poważne ograniczenia, uniemożliwiające precyzyjne zbadanie sezonowej charakterystyki szeregu. Z tego względu w artykule zastosowano niedostępne w standardowych pakietach eko-

¹ S. Hylleberg (1992).

² D. Findley i in. (1998), s. 52—127.

³ A. Maravall (2005).

⁴ Takie podejście w sytuacji występowania zależności pomiędzy długookresowym trendem a komponentem sezonowym zaleca m.in. P. Frances, B. Hobijn (1997), s. 25—47.

nometrycznych testy Hylleberg-Engle-Granger-Yoo (HEGY) oraz Akdi-Dickey dla danych miesięcznych, umożliwiające dokładne określenie rodzajów efektów sezonowych występujących w szeregu oraz ich istotności.

W pierwszej części opracowania scharakteryzowano sezonowość stochastyczną i deterministyczną. Przedstawiono również sposoby ich modelowania. Dalej opisano testy statystyczne, za pomocą których możliwa jest identyfikacja efektów sezonowych. Szczegółowo omówiono w nim test HEGY oraz Akdi-Dickey. Końcowa część artykułu ilustruje przydatność opisanych metod na przykładzie indeksu produkcji sprzedanej budowlano-montażowej w Polsce w latach 1995—2009.

SEZONOWOŚĆ STOCHASTYCZNA I DETERMINISTYCZNA

U podstaw badań nad zjawiskami sezonowymi leży założenie o możliwości dekompozycji danych surowych na komponenty cykliczne. Wśród podstawowych składników szeregu czasowego wyróżnia się:

- trend, który obrazuje długookresową tendencję zmian w szeregu czasowym. Jest on traktowany jako czynnik o nieskończonym cyklu;
- wahania cykliczne, rozumiane jako powtarzające się oscylacje o czasie trwania dłuższym niż rok, wywoływane przez procesy ekonomiczne związane z cyklami koniunkturalnymi w gospodarce;
- wahania nieregularne, obejmujące odchylenia od trendu będące wynikiem działania na badaną zmienną czynników, które nie mogą być skutecznie przewidywane i prognozowane. Na wahania nieregularne składa się nieskończona liczba procesów cyklicznych o jednakowej amplitudzie;
- wahania sezonowe definiowane jako powtarzalne, choć niekoniecznie regularne, odchylenia od trendu o pełnym cyklu równym jeden rok.

Sezonowość występująca w szeregu czasowym może mieć zarówno charakter deterministyczny, jak i stochastyczny. Szereg y_t można zatem przedstawić jako⁵:

$$y_t = g_j + x_t \quad (1)$$

gdzie:

g_j — komponent deterministyczny dla j -tego okresu,

x_t — komponent stochastyczny.

Sezonowość deterministyczna charakteryzuje się dokładną regularnością i dlatego może być ona precyzyjnie prognozowana. Proces ten jest generowany przez sezonowe zmienne zero-jedynkowe i zapisywany równaniem:

$$g_t = \sum_{s=1}^S \alpha_s D_{st} + \varepsilon_t \quad (2)$$

⁵ D. Osborn i in. (1988), s. 361—377.

gdzie:

t — numer obserwacji, $t = 1, \dots, T$, τ — rok,
 s — liczba podokresów w roku, $s = 1, \dots, S$, dla danych miesięcznych $S = 12$,
 D_{st} — zmienna zero-jedynkowa, przyjmująca wartość 1 dla s -tego podokresu i 0 dla pozostałych podokresów,
 α_s — nieznane współczynniki przy zmiennych zero-jedynkowych D_{st} ,
 ε_t — proces białego szumu⁶.

Obecność sezonowości deterministycznej może być wykrywana przy pomocy testów: Canova-Hansen⁷, Caner⁸, Tam-Reinsel⁹. Do badania istnienia w szeregu tego rodzaju sezonowości może być również wykorzystany test HEGY, którego konstrukcja została omówiona w dalszej części opracowania.

Sezonowość stochastyczna jest równoznaczna z występowaniem w szeregu czasowym sezonowych pierwiastków jednostkowych. W procesie przedstawionym równaniem:

$$\varphi(B)x_t = \varepsilon_t \quad (3)$$

gdzie:

$\varphi(B)$ — wielomian charakterystyczny operatora opóźnienia B ,
 B — operator opóźnienia, taki że $Bx_t = x_{t-1}$,
 ε_t — proces białego szumu,

występuje ona wówczas, gdy wielomian $\varphi(B)$ zawiera sezonowe pierwiastki jednostkowe¹⁰.

Jeżeli $\varphi(B) = 1 - B^S$, to stochastyczny szereg x_t przedstawiony w równaniu (3) jest sezonowo zintegrowany rzędu pierwszego¹¹.

⁶ Proces białego szumu to proces o zerowej wartości oczekiwanej, skończonej i stałej wariancji wynoszącej σ^2 , dla którego ε_t i ε_ζ są niezależne, jeśli $t \neq \zeta$.

⁷ Hipoteza zerowa testu Canova-Hansen, zakładająca że w szeregu występuje deterministyczny wzorec sezonowości, nie jest odrzucana również wówczas, gdy szereg nie zawiera komponentu sezonowego. Budowa testu została omówiona w P. Frances i in. (2005).

⁸ Opis testu dostępny w M. Caner (1998), s. 349—356.

⁹ Test omówiony w W.-K. Tam, G. Reinsel (1998), s. 609—625.

¹⁰ Oznacza to, że przynajmniej jeden pierwiastek wielomianu $\varphi(B)$ związany z częstotliwością sezonową jest co do modułu równy jeden.

¹¹ Szereg x_t jest sezonowo zintegrowany rzędu (d, D) , co oznaczane jest jako $x_t \sim I(d, D)$, jeśli po d -krotnym obliczeniu różnic w postaci $x_t - x_{t-1}$ oraz D -krotnym obliczeniu różnic sezonowych w postaci $x_t - x_{t-S}$, gdzie S jest liczbą wystąpień w roku, może być on przedstawiony w postaci stacjonarnego procesu ARMA (Autoregressive Moving Average). Stacjonarność rozumiana jest tu jako występowanie w szeregu stałej w czasie średniej i wariancji oraz kowariancji zależnej jedynie od odległości pomiędzy obserwacjami (Chatfield, 2003).

Identyfikacja w szeregu sezonowości stochastycznej jest dokonywana przeważnie na podstawie jego funkcji gęstości spektralnej wyrażonej wzorem¹²:

$$f(\omega_t) = \frac{\sigma^2}{|\varphi(e^{i\omega_t})|^2} \quad (4)$$

gdzie:

σ^2 — wariancja składnika losowego ε_t ,

ω_t — częstość kołowa, zdefiniowana jako $\omega_t = \frac{2\pi t}{T}$,

pozostałe oznaczenia jak wyżej.

Jeśli szereg wykazuje sezonowość stochastyczną, to wyznaczona dla niego funkcja gęstości spektralnej $f(\omega)$ osiąga lokalne maksima dla częstości sezonowych zdefiniowanych jako:

$$\omega_\varsigma = \frac{2\pi\varsigma}{S} \quad (5)$$

gdzie $\varsigma = 1, \dots, \frac{S}{2}$, S jest liczbą wystąpień w roku.

PRZEGLĄD TESTÓW SEZONOWEGO PIERWIASTKA JEDNOSTKOWEGO

Jednym z pierwszych, powszechnie stosowanych, narzędzi umożliwiających wykrywanie w szeregu pierwiastka jednostkowego był test Dickey-Fuller¹³ (DF). Ze względu na to, że jest on nieodporny na autokorelację badanego składnika losowego, w analizach ekonometrycznych wykorzystywana jest jego rozszerzona wersja — test ADF¹⁴ uwzględniający opóźnione wartości zmiennej zależnej. Jego podstawą jest równanie:

$$(1 - B)y_t = \delta y_{t-1} + \sum_{i=1}^h \gamma_i (1 - B)y_{t-i} + \varepsilon_t \quad (6)$$

¹² Dla celów analizy sezonowości stochastycznej funkcja gęstości spektralnej jest rozpatrywana dla $\omega_t \in (0, \frac{1}{2})$.

¹³ M. McAller, L. Oxley (1996), s. 10.

¹⁴ Y. Cheung, K. Lai (1995).

gdzie:

- B — operator opóźnienia taki, że $By_t = y_{t-1}$,
- δ — nieznaną współczynnik przy zmiennej y_{t-1} ,
- γ_i — nieznaną współczynnik przy zmiennej y_{t-i} ,
- h — oznacza liczbę opóźnień zmiennej zależnej konieczną do spełnienia założeń testu.

Istotę testu stanowi badanie wartości współczynnika δ . Jego hipoteza zerowa zakłada, że $\delta = 0$, co oznacza, że szereg y_t zawiera pierwiastek jednostkowy, natomiast hipoteza alternatywna ma postać $\delta \in (-2, 0)$ i jest równoznaczna z tym, że szereg y_t jest stacjonarny. W przypadku odrzucenia hipotezy zerowej, standardowo stosowana procedura testowania polega na zwiększaniu rzędu nie-sezonowych różnic aż do otrzymania szeregu stacjonarnego. Jednakże w przypadku obecności w szeregu czasowym sezonowych pierwiastków jednostkowych, niewykrywalnych przez test ADF, ten sposób postępowania jest zawodny. Spowodowało to konieczność dalszego rozwoju metod wykrywania i usuwania efektów sezonowych z szeregów czasowych.

Do najprostszych testów badających obecność w szeregu czasowym sezonowości stochastycznej należy, wykorzystujący metodologię ADF, test DHF. W swojej podstawowej wersji polega on na oszacowaniu metodą najmniejszych kwadratów (MNK) równania regresji¹⁵:

$$(1 - B^S)y_t = \delta y_{t-s} + \varepsilon_t \quad (7)$$

gdzie:

- S — liczba obserwacji szeregu y_t przypadająca na jeden rok,
- ε_t — proces białego szumu.

W przypadku gdy ε_t nie spełnia nałożonych na ten proces warunków, do równania (7) mogą być włączane opóźnione wartości $(1 - B^S)y_t$ oraz czynniki deterministyczne, takie jak: stała, trend oraz zero-jedynkowe zmienne sezonowe. Obliczona wartość statystyki testowej t -Studenta, równa stosunkowi estymatora MNK parametru δ do jego odchylenia standardowego, służy do weryfikacji hipotezy zerowej testu, zakładającej że $\delta = 0$. Jest ona równoznaczna z tym, że proces y_t jest sezonowo zintegrowany rzędu S .

Poważnym ograniczeniem testu DHF jest to, że testuje on obecność pierwiastków sezonowych i niesezonowego pierwiastka jednostkowego łącznie¹⁶. Hipoteza alternatywna testu stwierdza, że wszystkie pierwiastki sezonowe są

¹⁵ E. Ghysels, D. Osborn (2001).

¹⁶ S. Hyllberg (1992).

sobie równe co do modułu. Z uwagi na możliwość występowania w szeregu pierwiastków sezonowych tylko dla niektórych częstości sezonowych, wyniki otrzymywane po zastosowaniu testu mogą nie ukazywać rzeczywistej charakterystyki badanego procesu. Dlatego w artykule wykorzystano również test HEGY¹⁷ stanowiący naturalne rozszerzenie testu DHF. Umożliwia on badanie obecności w szeregu czasowym dowolnych sezonowych i niesezonowych pierwiastków jednostkowych.

Postać równania regresji stanowiącego fundament testu HEGY oraz zbiór testowanych hipotez jest zależny od częstotliwości badanego szeregu. Procedura testowania istnienia pierwiastków sezonowych w szeregu y_t o częstotliwości miesięcznej polega na estymacji równania w postaci¹⁸:

$$\varphi(B)y_{13,t} = \mu_t + \sum_{k=1}^{12} \zeta_k y_{k,t-1} + \varepsilon_t \quad (8)$$

gdzie:

$\varphi(B)$ — wielomian charakterystyczny operatora opóźnienia B , którego pierwiastki jednostkowe leżą poza kołem jednostkowym,

$\mu_t = \sum_{s=1}^{12} \gamma_s D_{st} + \beta_0 t$ — czynnik deterministyczny, wyrażony jako kombinacja liniowa zmiennej czasowej t i sezonowych zmiennych zero-jedynkowych D_{st} ,

ε_t — proces białego szumu,

$\zeta_1, \dots, \zeta_{12}$ — nieznane parametry strukturalne modelu,

$$y_{1,t} = (1 + B + B^2 + B^3 + B^4 + B^5 + B^6 + B^7 + B^8 + B^9 + B^{10} + B^{11})y_t,$$

$$y_{2,t} = -(1 - B + B^2 - B^3 + B^4 - B^5 + B^6 - B^7 + B^8 - B^9 + B^{10} - B^{11})y_t,$$

$$y_{3,t} = -(B - B^3 + B^5 - B^7 + B^9 - B^{11})y_t,$$

$$y_{4,t} = -(1 - B^2 + B^4 - B^6 + B^8 - B^{10})y_t,$$

$$y_{5,t} = -\frac{1}{2}(1 + B - 2B^2 + B^3 + B^4 - 2B^5 + B^6 + B^7 - 2B^8 + B^9 + B^{10} - 2B^{11})y_t,$$

$$y_{6,t} = -\frac{\sqrt{3}}{2}(1 - B + B^3 - B^4 + B^6 - B^7 + B^9 - B^{10})y_t,$$

$$y_{7,t} = -\frac{1}{2}(\sqrt{3} - B + B^3 - \sqrt{3}B^4 + 2B^5 - \sqrt{3}B^6 + B^7 - B^9 + \sqrt{3}B^{10} - 2B^{11})y_t,$$

$$y_{8,t} = -\frac{\sqrt{3}}{2}(1 + B - B^3 - B^4 + B^6 + B^7 - B^9 - B^{10})y_t,$$

¹⁷ Tamże.

¹⁸ Procedura testowania została szczegółowo omówiona w J. Miron (1992).

$$\begin{aligned}
y_{9,t} &= -\frac{1}{2}(\sqrt{3} - B + B^3 - \sqrt{3}B^4 + 2B^5 - \sqrt{3}B^6 + B^7 - B^9 + \sqrt{3}B^{10} - 2B^{11})y_t, \\
y_{10,t} &= \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}B + 2B^2 - \sqrt{3}B^3 + B^4 - B^6 + \sqrt{3}B^7 - 2B^8 + \sqrt{3}B^9 - B^{10})y_t, \\
y_{11,t} &= -\frac{1}{2}(\sqrt{3} + B - B^3 + \sqrt{3}B^4 - 2B^5 - \sqrt{3}B^6 - B^7 + B^9 + \sqrt{3}B^{10} + 2B^{11})y_t, \\
y_{12,t} &= -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}B + 2B^2 + \sqrt{3}B^3 + B^4 - B^6 - \sqrt{3}B^7 - 2B^8 - \sqrt{3}B^9 - B^{10})y_t, \\
y_{13,t} &= (1 - B^{12})y_t.
\end{aligned}$$

Testowanie hipotezy o występowaniu poszczególnych pierwiastków jednostkowych polega na oszacowaniu modelu (równanie (8)) MNK, a następnie porównaniu otrzymanej wartości statystyki testowej z wartościami rozkładów estymowanych przy zastosowaniu metod Monte Carlo¹⁹. Testowana jest obecność w szeregu dwunastu możliwych pierwiastków jednostkowych — jednego pierwiastka niesezonowego i jedenastu pierwiastków sezonowych — które zostały zestawione w tabl. 1.

TABL. 1. CZĘSTOŚCI SEZONOWE I NIESEZONOWE DLA DANYCH MIESIĘCZNYCH

Pierwiastki jednostkowe	ω_t	k
1	0	1
-1	π	2
i	$\frac{\pi}{2}$	3
$-i$	$-\frac{\pi}{2}$	4
$-\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}i)$	$-\frac{2\pi}{3}$	5
$-\frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}i)$	$\frac{2\pi}{3}$	6
$\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}i)$	$\frac{\pi}{3}$	7
$\frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}i)$	$-\frac{\pi}{3}$	8
$-\frac{1}{2}(\sqrt{3} + i)$	$-\frac{5\pi}{6}$	9
$-\frac{1}{2}(\sqrt{3} - i)$	$\frac{5\pi}{6}$	10
$\frac{1}{2}(\sqrt{3} + i)$	$\frac{\pi}{6}$	11
$\frac{1}{2}(\sqrt{3} - i)$	$-\frac{\pi}{6}$	12

Źródło: Beaulieu, Miron (1992).

¹⁹ Sposób wyznaczania wartości krytycznych testu HEGY został opisany w J. Beaulieu, J. Miron (1992).

Test HEGY umożliwia testowanie istnienia w szeregu zarówno sezonowości stochastycznej, jak i deterministycznej. O występowaniu sezonowości deterministycznej świadczy odrzucenie hipotezy zerowej, według której wszystkie współczynniki γ_k są równe zero. Dla częstotliwości $\omega = 0$ oraz $\omega = \pi$, na podstawie statystyki testowej testu t -Studenta, weryfikowana jest hipoteza zerowa w postaci $\varsigma_k = 0$ przeciwko hipotezie alternatywnej $\varsigma_k > 0$. Występowanie sezonowości stochastycznej jest testowane przy pomocy statystyki testowej testu F dla hipotezy $\pi_{k-1} = \pi_k = 0$, gdzie $k > 2$. Brak w szeregu sezonowości stochastycznej jest równoznaczny z tym, że spełnione są jednocześnie dwa warunki — $\pi_2 = 0$ oraz $\pi_k = 0$ — dla przynajmniej jednej częstotliwości z każdego ze zbiorów: $k = (\{3, 4\}, \{5, 6\}, \{7, 8\}, \{9, 10\}, \{11, 12\})$. Warunkiem prawidłowego stosowania testu HEGY jest normalność rozkładu reszt, brak występowania ich autokorelacji oraz warunkowej heteroskedastyczności.

W naszym opracowaniu zastosowano również skonstruowany w ostatnim czasie, ale jeszcze nierozpowszechniony, test Akdi-Dickey²⁰. Jest to test pierwiastka jednostkowego opierający się na analizie spektralnej szeregu. Jego podstawą jest analiza periodogramu szeregu otrzymanego w wyniku przekształcenia zmiennej y_t do dziediny częstości. Periodogram jest wyrażony wzorem:

$$I_T(\omega_t) = \frac{T}{2} (a_t^2 + b_t^2) \quad (9)$$

gdzie:

t — numer obserwacji, $t = 1, \dots, T$,

ω_t — częstość kołowa, zdefiniowana jako $\omega_t = \frac{2\pi t}{T}$,

a_t i b_t — współczynniki zdefiniowane odpowiednio jako:

$$a_t = \frac{2}{T} \sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y}) \cos(\omega_t t) \text{ oraz } b_t = \frac{2}{T} \sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y}) \sin(\omega_t t), \text{ gdzie } \bar{y} \text{ jest}$$

średnią szeregu y_t .

Dla $\omega_t = \frac{2\pi t}{T}$ zachodzi równość:

$$\sum_{t=1}^T \cos(\omega_t t) = \sum_{t=1}^T \sin(\omega_t t) = 0 \quad (10)$$

²⁰ Opis testu pochodzi z artykułu Akdi Y., Dickey D., Ucar N., *Stochastic Seasonality and Habit in US Consumption of Nondurables*, <http://www.pglocal.com.tr/prl/resource/habit.pdf>.

Współczynniki a_t i b_t mają wówczas stałą średnią, z czego wynika, że periodogram ma również stałą średnią.

Statystyka testowa testu Akdi-Dickey ma postać:

$$T(\omega_t) = \frac{2(1 - \cos(\omega_t))}{\hat{\sigma}^2} I_T(\omega_t) \quad (11)$$

gdzie $\hat{\sigma}^2$ — oszacowana wariancja składnika losowego, pozostałe oznaczenia jak zastosowano wcześniej.

W przypadku dużej próby statystyka testowa $T(\omega_t)$ zbiega asymptotycznie według dystrybucyj do:

$$T(\omega_t) = \frac{2(1 - \cos(\omega_t))}{\hat{\sigma}^2} I_T(\omega_t) \xrightarrow{D} Z_1^2 + 3Z_2^2 \quad (12)$$

gdzie Z_1 i Z_2 są niezależnymi od siebie zmiennymi o rozkładzie standardowym, normalnym, pozostałe oznaczenia jak poprzednio.

Hipoteza zerowa testu, o tym że badany szereg ma pierwiastek jednostkowy, jest odrzucana, gdy obliczona wartość statystyki testowej jest mniejsza od wartości krytycznej²¹.

Obecności w szeregu więcej niż jednego niesezonowego pierwiastka jednostkowego lub podwójnych pierwiastków sezonowych towarzyszy niekiedy wzrost sezonowej wariancji. Występowanie takiego zachowania szeregu czasowego może być wykrywane przy pomocy testu Osborn, którego statystyka ma postać²²:

$$\varphi(B) \Delta A_s y_t = \alpha_0 + \beta_0 t + \sum_{s=1}^{S-1} \gamma_s D_{st} + \sum_{s=1}^{S-1} \beta_s D_{st} t + \pi_1 (1 - B^S) y_{t-1} + \pi_2 (1 - B) y_{t-S} + \varepsilon_t \quad (13)$$

gdzie:

α_0 — stała,

t — zmienna czasowa, pozostałe oznaczenia jak zastosowano wcześniej.

Modelowanie zmienności sezonowej wariancji w czasie jest zapewnione przez dopuszczenie możliwości występowania różnych wartości współczynników β . Hipoteza zerowa testu zakłada, że parametry π_1 oraz π_2 są równe zero. Brak podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej oznacza, że zastosowanie różnicowania jednokrotnego i sezonowego prowadzi do uzyskania stacjonarnej

²¹ Dokładne zestawienie wartości krytycznych testu dla poszczególnych poziomów istotności jest zawarte w opracowaniu Y. Akdi, D. Dickey (1998).

²² P. Frances i in. (2005).

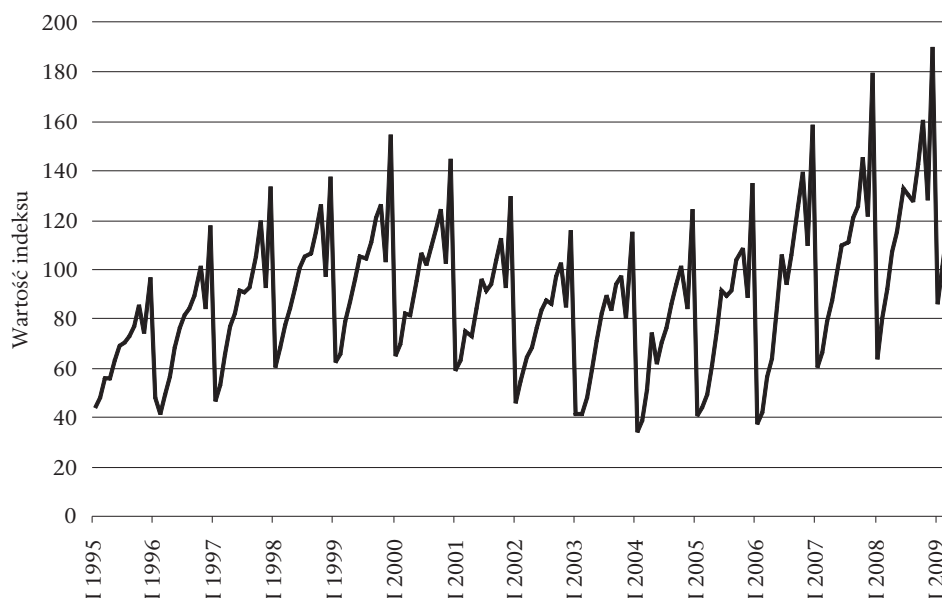
zmiennej y_t . Jeśli $\pi_1 = 0$ i $\pi_2 \neq 0$, to w celu otrzymania stacjonarnej zmiennej y_t konieczne jest zastosowanie filtra $(1 - B)y_t$. W przypadku gdy $\pi_1 \neq 0$ i $\pi_2 = 0$ należy użyć filtra $(1 - B^s)y_t$. Brak podstaw do odrzucenia hipotezy świadczy o tym, że zarówno π_1 jak i π_2 są różne od zera i oznacza to, że nie występuje konieczność przekształcania zmiennej objaśnianej.

TESTOWANIE OBECNOŚCI PIERWIASTKÓW SEZONOWYCH W SZEREGU PRODUKCJI BUDOWLANO-MONTAŻOWEJ

Analizie poddano indeks produkcji budowlano-montażowej w cenach stałych (2000 = 100) w Polsce. Jest on tworzony przez GUS na podstawie danych obejmujących przedsiębiorstwa o liczbie pracujących powyżej 9 osób. Wskaźnik z częstotliwością miesięczną mierzy zmiany wartości produkcji budowlano-montażowej o charakterze inwestycyjnym i remontowym, zrealizowanej przez określoną kategorię podmiotów gospodarczych. Zalicza się on do kluczowych kategorii obrazujących kondycję sektora realnego gospodarki. Jest on jednym z ważniejszych czynników wpływających na kształtowanie się PKB w Polsce.

Badany szereg czasowy obejmował okres 01.1995 r.—04.2009 r. Kształtowanie się tej kategorii przedstawiono na wykr. 1.

Wykr. 1. INDEKS PRODUKCJI BUDOWLANO-MONTAŻOWEJ (w cenach stałych)

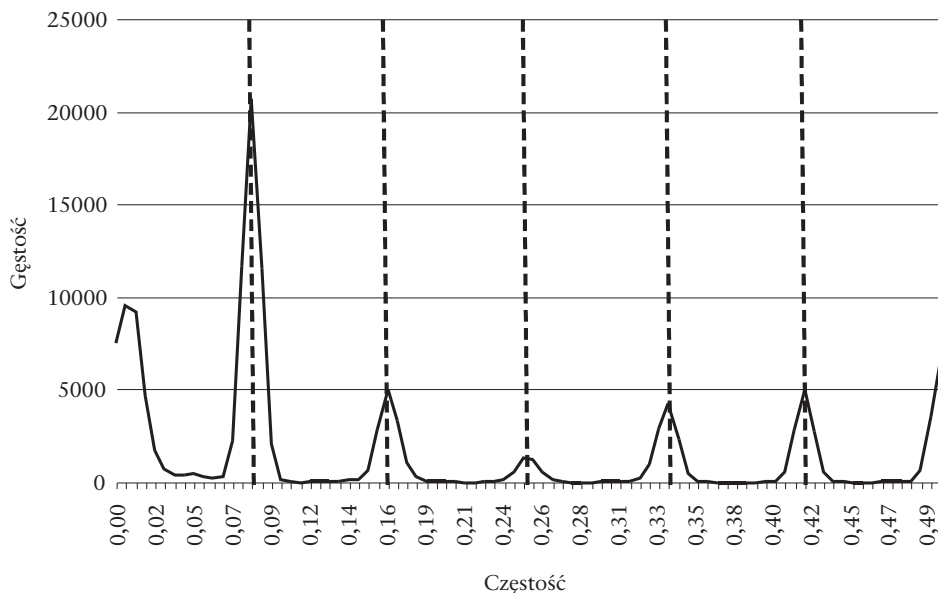


Źródło: opracowanie własne na podstawie danych GUS.

Wykres 1 wskazuje, że można oczekiwać wykrycia w szeregu silnych wahań sezonowych. Wyraźnie zauważalny jest powolny wzrost wartości indeksu w drugim półroczu każdego roku. Indeks osiąga maksima lokalne w kolejnych grudniach, po czym obserwowany jest gwałtowny spadek wartości indeksu na początku roku. Taki przebieg zmienności indeksu jest spowodowany m.in. czynnikami klimatycznymi oraz administracyjno-podatkowymi.

Na obecność w szeregu wahań sezonowych wskazuje również przebieg funkcji gęstości spektralnej²³ szeregu zamieszczonej na wyk. 2. Linia przerywaną zaznaczono lokalne maksima funkcji gęstości spektralnej dla częstości oznaczających występowanie impulsu z częstotliwością roczną ($1/12 \approx 0,083$), półroczną ($2/12 \approx 0,167$) i kwartalną ($4/12 \approx 0,333$) oraz trzy ($3/12 \approx 0,250$) i pięć ($5/12 \approx 0,417$) razy w ciągu roku.

Wykr. 2. FUNKCJA GĘSTOŚCI SPEKTRALNEJ DLA INDEKSU PRODUKCJI BUDOWLANO-MONTAŻOWEJ (w cenach stałych)



Źródło: obliczenia własne.

Formalną analizę szeregu rozpoczęto od weryfikacji jego stacjonarności. Właściwości statystyczne poszczególnych testów pierwiastka jednostkowego powo-

²³ Do wykonania wykresu funkcji gęstości spektralnej posłużono się oknem Bartletta. Ze względu na konieczność spełnienia warunku stacjonarności, z poddanego analizie widmowej szeregu usunięto trend i odjęto średnią.

dużą niekiedy otrzymanie sprzecznych wniosków przy zastosowaniu różnej statystyki testowej. Z tego względu w artykule stacjonarność szeregu zbadano niezależnie testami ADF, KPSS²⁴, DHF i HF²⁵. Otrzymane wyniki przedstawiono w tabl. 2²⁶. Wartości krytyczne testów zamieszczono w tabl. 3.

**TABL. 2. WARTOŚCI STATYSTYKI PIERWIASTKA JEDNOSTKOWEGO
DLA INDEKSU PRODUKCJI BUDOWLANO-MONTAŻOWEJ**

Wyszczególnienie	ADF	KPSS	DHF	HF
Wersja testu:				
ze stałą	0,14	0,53	0,00	—
ze stałą i trendem	-0,21	0,23	-0,45	—
na pierwszych różnicach ze stałą	-1,77	0,14	—	1,32

Źródło: obliczenia własne.

TABL. 3. WARTOŚCI KRYTYCZNE TESTÓW PIERWIASTKA JEDNOSTKOWEGO

Testy	$\alpha = 1\%$	$\alpha = 5\%$	$\alpha = 10\%$
ADF (ze stałą)	-3,50	-2,89	2,58
ADF (ze stałą i trendem)	-4,03	-3,44	-3,15
KPSS (ze stałą)	0,74	0,46	0,35
KPSS (ze stałą i trendem)	0,22	0,15	0,12
DHF (ze stałą)	-2,73	-2,01	-1,65
DHF (ze stałą i trendem)	-2,73	-2,01	-1,65
HF (ze stałą)	18,47	15,13	13,49

Źródło: obliczenia własne.

Obliczona statystyka testowa testu ADF wskazuje na brak podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej o występowaniu pierwiastka jednostkowego na każdym rozpatrywanym poziomie istotności. W przypadku testu KPSS na poziomie istotności $\alpha = 0,05$ odrzucano hipotezę zerową o stacjonarności analizowanego szeregu. Otrzymane wartości statystyk testu DHF nie dają podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej o występowaniu sezonowego pierwiastka jednostkowego w badanym szeregu. Wynik testu HF wskazuje na brak podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej, stwierdzającej, że jednokrotne oraz sezonowe różnicowanie szeregu prowadzi do uzyskania procesu stacjonarnego.

W tabl. 4 przedstawiono wyniki testu Akdi-Dickey. Statystyka testowa $T(\omega_t)$ wskazuje, czy różnicowanie rzędu p szeregu przedstawionego prowadzi do

²⁴ Opis testu KPSS dostępny jest w D. Kwiatkowski i in. (1992), s. 159—178.

²⁵ Konstrukcja testu HF została omówiona w publikacji Hasza D., Fuller W. (1982), s. 1209—1216.

²⁶ Po przeprowadzeniu testu DF wykryto autokorelację reszt. Z tego względu zastosowano test ADF. Po wykonaniu testów DHF i HF, na podstawie wyników testu Breusch-Godfrey, nie stwierdzono podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej o występowaniu autokorelacji składnika losowego.

otrzymania procesu stacjonarnego. Na podstawie uzyskanych rezultatów można stwierdzić brak podstaw do odrzucenia hipotezy o występowaniu sezonowego oraz niesezonego pierwiastka jednostkowego. Potwierdzają to wyniki omówionych analiz.

TABL. 4. WARTOŚCI STATYSTYKI TESTU AKDI-DICKEY DLA INDEKSU PRODUKCJI BUDOWLANO-MONTAŻOWEJ

Szeregi	p	$I_T(\omega_t)$	$\hat{\sigma}^2$	$T(\omega_t)$	Wartości krytyczne na poziomie istotności			Wyniki
					10%	5%	1%	
y	Δ	23145,29	662,16	0,248	0,368	0,178	0,035	I(1)
Δy	Δ	53,62	688,82	0,000	0,368	0,178	0,035	I(0)
Δy	Δ_{12}	11861,94	64,72	35,844	0,373	0,186	0,036	SI(1)
$\Delta\Delta_{12}y$	Δ_{12}	10,73	46,53	0,052	0,373	0,186	0,036	SI(0)

Źródło: obliczenia własne. Podane w tabeli wartości krytyczne pochodzą z publikacji Y. Akdi, D. Dickey (1998).

Zestawienie wyniku testu HEGY zawarto w tabl. 5²⁷. Wartości statystyki testowej wskazują na istotność parametrów γ_1 , γ_2 , γ_{12} opisujących sezonowość deterministyczną szeregu. Brak podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej, według której pozostałe czynniki deterministyczne $\gamma_3, \dots, \gamma_{11}$ są równe zero, świadczy o słabym wpływie sezonowości deterministycznej na szereg. Ze względu na brak istotności trendu oszacowano model z pominięciem tego czynnika. Dla częstości ω równej 0 wynik testu wskazuje na brak podstaw do odrzucenia $H_0: \pi_1 = 0$, co oznacza, że y_t ma pierwiastek jednostkowy równy 1.

Na poziomie istotności 5% nie występują również podstawy do odrzucenia hipotez zerowych, według których zmienna y_t ma pierwiastki jednostkowe równe: -1 , $-\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{3}i)$, $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{3}i)$, $-\frac{1}{2}(\sqrt{3} \pm i)$, $\frac{1}{2}(\sqrt{3} \pm i)$.

Natomiast na poziomie istotności 1% nie można odrzucić hipotezy, że szereg posiada pierwiastki jednostkowe równe $\pm i$ (odpowiednia wartość krytyczna wynosi $T^* = 8,40$). Hipoteza o jednoczesnym występowaniu wszystkich pierwiastków jednostkowych jest natomiast odrzucana na poziomie istotności $\alpha = 0,05$ i znajduje się na granicy obszaru $\alpha = 0,11$. Wynik ten jest rezultatem jednoczesnego występowania w szeregu sezonowości stochastycznej i deterministycznej. Ze względu na to, że niewielka część zmiennych zero-jedynkowych, modelujących sezonowość deterministyczną, okazała się istotna, przeprowadzo-

²⁷ Dla żadnej z przeprowadzonych wersji testu nie stwierdzono podstaw do odrzucenia następujących hipotez zerowych o występowaniu: normalności reszt (test Jarque-Bera), braku autokorelacji reszt (test Breusch-Godfrey), warunkowej homoskedastyczności składnika losowego (test ARCH-LM).

no test HEGY dla równania, w którym zmienne $\gamma_1 - \gamma_{12}$ zostały zastąpione stałą γ_0 . Wyniki otrzymane dla tej wersji testu zostały przedstawione w tabl. 5.

TABL. 5. WARTOŚCI STATYSTYKI TESTOWEJ ORAZ KRYTYCZNEJ TESTU HEGY DLA INDEKSU PRODUKCJI BUDOWLANO-MONTAŻOWEJ

Hipotezy zerowe	Statystyka testowa				
	bez zmiennych sezonowych			ze zmiennymi sezonowymi	
	bez trendu, bez stałej	bez trendu, ze stałą	z trendem, ze stałą	bez trendu, bez stałej	z trendem, bez stałej
$\gamma_1 = 0$	—	—	—	-4,95 [1,96]	-4,93 [1,96]
$\gamma_2 = 0$	—	—	—	-2,59 [1,96]	-2,61 [1,96]
$\gamma_3 = 0$	—	—	—	1,34 [1,96]	1,28 [1,96]
$\gamma_4 = 0$	—	—	—	1,20 [1,96]	1,14 [1,96]
$\gamma_5 = 0$	—	—	—	1,77 [1,96]	1,75 [1,96]
$\gamma_6 = 0$	—	—	—	1,24 [1,96]	1,24 [1,96]
$\gamma_7 = 0$	—	—	—	1,80 [1,96]	1,82 [1,96]
$\gamma_8 = 0$	—	—	—	1,73 [1,96]	1,76 [1,96]
$\gamma_9 = 0$	—	—	—	0,94 [1,96]	0,97 [1,96]
$\gamma_{10} = 0$	—	—	—	1,24 [1,96]	1,26 [1,96]
$\gamma_{11} = 0$	—	—	—	0,16 [1,96]	0,18 [1,96]
$\gamma_{12} = 0$	—	—	—	3,14 [1,96]	3,15 [1,96]
$\beta_0 = 0$	—	—	—	—	1,75 [1,96]
$\gamma_0 = 0$	—	1,50 [1,96]	1,49 [1,96]	—	—
$\pi_1 = 0$	0,09 [-1,93]	-1,14 [-2,82]	-1,36 [-3,37]	1,77 [-2,81]	1,24 [-3,35]
$\pi_2 = 0$	0,95 [-1,94]	0,94 [-1,94]	0,93 [-1,94]	1,24 [-2,81]	1,82 [-2,81]
$\pi_3 = \pi_4 = 0$	0,61 [3,07]	0,67 [3,07]	0,67 [3,05]	7,29 [6,35]	7,04 [6,35]
$\pi_5 = \pi_6 = 0$	0,71 [3,06]	0,74 [3,05]	0,73 [3,05]	4,34 [6,48]	4,43 [6,48]
$\pi_7 = \pi_8 = 0$	0,02 [3,10]	0,01 [3,09]	0,02 [3,08]	4,87 [6,33]	4,92 [6,30]
$\pi_9 = \pi_{10} = 0$	0,18 [3,11]	0,18 [3,09]	0,18 [3,08]	5,92 [6,41]	5,98 [6,40]
$\pi_{11} = \pi_{12} = 0$	0,02 [3,11]	0,03 [3,10]	0,03 [3,09]	5,61 [6,47]	5,56 [6,46]
$\pi_1 = \dots = \pi_{12} = 0$	0,43 [1,90]	0,51 [1,89]	0,57 [1,88]	6,16 [4,44]	6,21 [4,44]
$\pi_2 = \dots = \pi_{12} = 0$	0,38 [1,88]	0,40 [2,07]	0,40 [2,30]	6,50 [4,37]	6,46 [4,58]

Źródło: obliczenia własne. Podane w nawiasach kwadratowych wartości krytyczne pochodzą z P. Frances, B. Hobijn (1997).

Wyniki testu Osborn (tabl. 6), dla każdego z wariantów testu, potwierdzają brak podstaw do odrzucenia hipotezy, że π_1 oraz π_2 są równe zero²⁸. Oznacza to, że do otrzymania szeregu stacjonarnego konieczne jest wykonanie różnicowania zwykłego oraz sezonowego.

²⁸ Test Osborn wymaga przeprowadzenia analogicznej diagnostyki reszt modelu, jak test HEGY. Wyniki testów diagnostycznych nie dały podstaw do stwierdzenia występowania nieprawidłowej struktury reszt.

TABL. 6. WARTOŚCI STATYSTYKI TESTOWEJ ORAZ KRYTYCZNEJ TESTU OSBORN DLA INDEKSU PRODUKCJI BUDOWLANO-MONTAŻOWEJ

Hipotezy zerowe	Statystyka testowa	Wartości krytyczne		
		1%	5%	10%
<i>h</i> = 4, bez zmiennych sezonowych, bez trendu				
$\pi_1 = 0$	-0,03	-2,72	-2,10	-1,74
$\pi_2 = 0$	1,19	-6,38	-5,67	-5,30
$\pi_1 = \pi_2 = 0$	0,71	22,82	18,16	16,01
<i>h</i> = 4, bez zmiennych sezonowych, z trendem				
$\pi_1 = 0$	-0,02	-3,47	-2,82	-1,49
$\pi_2 = 0$	1,19	-6,37	-5,67	-5,30
$\pi_1 = \pi_2 = 0$	0,72	24,04	19,57	17,31
<i>h</i> = 4, ze zmiennymi sezonowymi, z trendem				
$\pi_1 = 0$	-0,37	-2,85	-2,11	-1,71
$\pi_2 = 0$	-4,62	-8,74	-8,04	-7,67
$\pi_1 = \pi_2 = 0$	10,72	42,24	35,93	32,73

Ź r ó d ł o: obliczenia własne; *h* oznacza liczbę opóźnień zmiennej zależnej konieczną do spełnienia założeń testu. Podane wartości krytyczne pochodzą z P. Frances, B. Hobijn (1997).

Podsumowanie

W opracowaniu przedstawiono metody wykrywania w szeregu czasowym sezonowości stochastycznej i deterministycznej. Każdy z tych rodzajów sezonowości jest modelowany w odmienny sposób. Prawidłowa klasyfikacja przez analityka typu zaburzeń sezonowych obecnych w analizowanych danych jest konieczna, gdyż zapobiega wystąpieniu obciążenia w konstruowanym na ich podstawie modelu oraz niskiej jakości prognoz²⁹.

Szczegółowa analiza doprowadziła do wykrycia w szeregu produkcji budowlano-montażowej w Polsce istnienia klasycznego pierwiastka jednostkowego oraz sezonowych pierwiastków jednostkowych dla wszystkich częstości sezonowych. W badaniu wykorzystano szeroki zbiór testów, co umożliwiło sformułowanie jednoznacznych, wiarygodnych wniosków. Wyniki przedstawionych w opracowaniu testów w jednoznaczny sposób wskazały na przekształcenia, jakim należy poddać szereg w celu przekształcenia go do postaci stacjonarnej. Zastosowany test HEGY wykazał również obecność słabej sezonowości deterministycznej. Jednakże brak istotności wszystkich zmiennych deterministycznych oznacza, że nie występuje konieczność uwzględniania tych czynników w przekształceniach, jakim zostanie poddany szereg.

mgr Natalia Nehrebecka, mgr Sylwia Grudkowska — NBP

²⁹ A. Aguirre (2000).

LITERATURA

- Aguirre A. (2000), *Testing for Seasonal Unit Roots using Monthly Data*, Universidade Federal de Minas Gerais, Textos para Discussão Cedeplar-UFMG, No. 139
- Akdi Y., Dickey D. (1998), *Periodograms for Unit Root Time Series: Distributions and Tests*, „Communications in Statistics”, vol. 27
- Beaulieu J., Miron J. (1992), *Seasonal Unit Roots in Aggregate U.S. Data*, National Bureau of Economic Research, „Technical Paper”, No. 126
- Caner M. (1998), *A Locally Optimal Seasonal Unit-Root Test*, „Journal of Business and Economic Statistics”, No. 16
- Chatfield C. (2003), *An Analysis of Time Series: An Introduction*, Chapman & Hall/CRC
- Cheung Y., Lai K. (1995), *Lag Order and Critical Values of the Augmented Dickey-Fuller Test*, No.13, vol. 3
- Findley D., Monsell B., Bell W., Otto M., Bor-Chung Chen (1998), *New Capabilities and Methods of the X-12-ARIMA Seasonal Adjustment Program*, „Journal of Business and Economic Statistics”, vol. 16
- Frances P., Hobijn B. (1997), *Critical values for unit root tests in seasonal time series*, „Journal of Applied Statistics”, No. 1, vol. 24
- Frances P., Paap R., Fok D. (2005), *Performance of Seasonal Adjustment Procedures: Simulation and Empirical Results*, Erasmus University Rotterdam, Econometric Institute, Econometric Institute Report
- Ghysels E., Osborn D. (2001), *The Econometric Analysis of Seasonal Time Series*, Cambridge University Press
- Hasza D., Fuller W. (1982), *Testing for Nonstationary Parameter Specifications in Seasonal Time Series Models*, „The Annals of Statistics”, Princeton University Press, No. 4, vol. 10
- Hylleberg S. (1992), *Modelling Seasonality*, Oxford University Press
- Kwiatkowski D., Phillips P., Schmidt P., Shin Y. (1992), *Testing the Null Hypothesis of Stationarity Against the Alternative of a Unit Root: How Sure Are We That Economic Time Series Have a Unit Root?*, „Journal of Econometrics”, vol. 54
- Maravall A. (2005), *An Application of the automatic procedure of TRAMO and SEATS: Direct versus Indirect Adjustment*, Banco de España Working Papers, No. 0524
- McAller M., Oxley L. (1999), *Practical Issues in Cointegration Analysis*, Blackwell Publishers Ltd
- Miron J. (1992), *Seasonal Unit Roots in Aggregate U.S Data*, National Bureau of Economic Research, „Technical Paper”, No. 126
- Osborn D., Chui A., Smith J., Birchenhall C. (1988), *Seasonality and the Order of Integration for Consumption*, Oxford Bulletin of Economics and Statistics, No. 50
- Tam W.-K., Reinsel G. (1998), *Seasonal Moving — Average Unit Root Tests in the Presence of Linear Trend*, „Journal of Time Series Analysis”, No. 19

SUMMARY

The article presents the influence of seasonal effects on time series. As an important case study, the models for deterministic and stochastic seasonal components have been discussed. A number of procedures to test the null hypothesis of seasonal integration have been described, including HEGY as well as Akdi-Dickey tests. The index of sold construction and assembly production in

constant prices has been used for illustration. The authors have provided the evidence on the presence of seasonal unit roots and seasonal dummy variables in this time series.

РЕЗЮМЕ

Статья рассматривает влияние сезонных эффектов на временные ряды. В статье представляются характерные черты стохастической и детерминистической сезонности и тесты используемые для их определения. Обсуждается конструкция теста HEGY и Akdi-Dickey. Были сделаны эмпирические вычисления для индекса строительно-монтажной продукции за период январь 1995 г. — апрель 2009 г. В ряду обнаружено наличие обоих видов (типов) сезонности. Проведенные тесты указывают на выступление важных двоичных сезонных переменных и единичных сезонных значений.